

Der Einfluß der Restwechselwirkung V_{PN} auf das Rotationsspektrum des u-u-Kerns ^{166}Ho

M. REINECKE, H. RUDER und H. VOLZ

Institut für Theoretische Physik der Universität Erlangen-Nürnberg, Erlangen

(Z. Naturforsch. 27 a, 850—859 [1972]; eingegangen am 7. Januar 1972)

The Influence of the Residual Interaction V_{PN} on the Rotational Spectrum of the Odd-Odd Nucleus ^{166}Ho

Starting with a model for odd-odd nuclei, which had been used in former investigation (rigid, symmetrical top for the deformed even-even core, two extra particles in a Nilsson potential), the influence of the coupling term H_c and of the residual interaction V_{PN} on the rotational spectrum of the odd-odd nucleus ^{166}Ho are discussed. It is shown, that in this nucleus neither the coupling term H_c nor a pure Wigner force can explain the characteristic features of the rotational spectrum. It is therefore necessary to introduce a residual interaction V_{PN} , which contains at least a spin-spin term. The explicit calculation for the nucleus ^{166}Ho with a simple ansatz (δ -interaction with spin-spin term) already leads to a qualitative explanation of the particularities in the observed rotational spectrum. The investigations show a way how to get more information about the proton-neutron interaction in odd-odd nuclei.

I. Einleitung

Frühe und noch recht unvollständige Messungen des Energiespektrums von ^{166}Ho , die von GEIGER, GRAHAM und EWAN¹ und anderen 1960 durchgeführt wurden, zeigten die Niveaufolge $0^-, 2^-, 1^-$. Unter Anwendung des Nilsson-Modells² auf den deformierten Kern ^{166}Ho stellten GALLAGHER und MOSZKOWSKI³ fest, daß im 0^- - und in einem zu erwartenden, noch nicht gemessenen 7^- -Zustand Proton und Neutron in Nilsson-Niveaus mit den Quantenzahlen $\Omega_P, \pi_P, [N_P, n_{ZP}, \Lambda_P] = \frac{7}{2}, -, [5, 2, 3]$ bzw. $\Omega_N, \pi_N, [N_N, n_{ZN}, \Lambda_N] = \frac{7}{2}, +, [6, 3, 3]$ sitzen, wobei N , n_Z und Λ allerdings nur im Grenzfall unendlich großer Deformation gute Quantenzahlen sind. Gallagher und Moszkowski extrapolierten aus den für den kugelsymmetrischen Fall gültigen Nordheim-Regeln Kopplungsregeln für den deformierten Fall, die streng im Grenzfall unendlich großer Deformation gelten sollen. Nach diesen Regeln müßte beim ^{166}Ho der 7^- -Zustand der Grundzustand sein, so daß, wie ASARO, PERLMAN, RASMUSSEN und THOMSON⁴ feststellten, diese Regeln verletzt sind.

Schon auf Grund dieses unvollständigen experimentellen Materials wurde von GEIGER, GRAHAM und EWAN¹ vermutet, daß es sich bei den Niveaus $0^-, 2^-, 1^-$ um Anfänge einer $K = 0$ -Rotationsbande handelt, wobei in dieser Bande allerdings die Ni-

veaus mit ungeradem Drehimpuls gegenüber den Niveaus mit geradem Drehimpuls nach oben versetzt sein müßten. Das später zitierte u-u-Kernmodell kann, wie Asaro et al. erkannten, erklären, daß auf Grund der Struktur der Wellenfunktion des Problems dieser „odd-even-shift“ genannte Effekt nur in $K = 0$ -Rotationsbanden auftritt und vermutlich von der Restwechselwirkung V_{PN} zwischen dem unpaarigen Proton und Neutron verursacht wird.

NEWBY⁵ konnte zeigen, daß beim ^{166}Ho nur die Restwechselwirkung V_{PN} und keine anderen Anteile des Hamilton-Operators für den odd-even-shift verantwortlich sind. Neben zwei nur für den Grenzfall unendlich großer Deformation streng gültigen Auswahlregeln für die Diagonalelemente von V_{PN} , die für einen endlich deformierten u-u-Kern wie ^{166}Ho natürlich keine Bedeutung haben, erhielt Newby durch explizite Rechnung, daß unabhängig von der Deformation eine reine Ortswechselwirkung keine von Null verschiedenen Diagonalelemente für diese Verschiebung liefert. Bei seinen quantitativen Rechnungen benützte Newby als Ansatz für V_{PN} eine Gauß-Wechselwirkung mit Spin-Spin-Term und Ortsaustauschterm, wobei er die Parameter des Ansatzes nicht durch Anpassung ans Experiment bestimmte, was wegen der wenigen gemessenen Niveaus auch nicht sinnvoll gewesen wäre, sondern die aus Streuexperimenten ermittelten Werte übernahm. Für die Verschiebung zwischen den Niveaus mit geraden und denen mit ungeraden Drehimpulswerten in der $K = 0$ -Bande erhielt er unter der Annahme, daß beide Teil-

Sonderdruckanforderungen an das Institut für Theoretische Physik der Universität Erlangen-Nürnberg, D-8520 Erlangen, Glückstraße 6.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

banden das gleiche Trägheitsmoment haben, einen 4-fach zu großen Wert.

1963 wurden von STRUBLE et al.⁶ neuere Messungen des Spektrums von ^{166}Ho veröffentlicht, die für die $K=0$ -Bande weitere Niveaus lieferten, ferner die vermutete $K=7$ -Bande bestätigten und für diese das gleiche Trägheitsmoment ergaben wie für die auf $K=0$ aufbauenden Teilbanden. Außerdem fanden sie eine $K=3$ - und $K=4$ -Bande (Neutron angeregt ins Nilsson-Niveau mit den Quantenzahlen $Q_N, \pi'_N, [N'_N, n'_{ZN}, A'_N] = \frac{1}{2}, -, [5, 2, 1]$), die von späteren Messungen⁷ mit allerdings veränderter energetischer Lage bestätigt wurden.

Von Davidson et al. wurde das schon von Asaro et al. und Newby benutzte u-u-Kernmodell als Erweiterung des g-u- und u-g-Kernmodells in ausführlicher Weise zunächst in⁸ und dann auch in⁹ diskutiert, wobei jedoch keine genauen Aussagen über den energetischen Abstand der Bandenköpfe zusammengehöriger K_- - und K_+ -Banden, wie der $K=0$ - und $K=7$ -Bande bzw. der $K=3$ - und $K=4$ -Bande gemacht werden, insbesondere also nicht das Problem untersucht wird, warum entgegen der Kopplungsregeln von Gallagher und Moszkowski der 0^- -Zustand der Grundzustand ist. Im Gegensatz zu Newby glaubt Davidson in dem odd-even-shift eine Wirkung des Kopplungsgliedes (bei ihm mit H_c bezeichnet) zu sehen.

Man kann also sagen, daß u-u-Kerne, speziell der Kern ^{166}Ho , ein interessantes Problem für die theoretische Deutung von Kernniveaus darstellen. Die vorliegende Arbeit soll an Hand eines modellmäßigen Ansatzes, welcher demjenigen von Davidson entspricht, zeigen, daß die Restwechselwirkung V_{PN} von entscheidender Bedeutung für die Verschiebung der verschiedenen Rotationsbanden ist. Dabei ergibt sich zwangsläufig auch eine Erklärung für die Durchbrechung der Kopplungsregeln von Gallagher und Moszkowski. Für die Rechnung wird zunächst eine δ -funktionsförmige Wechselwirkung benutzt. Da die quantitativen Ergebnisse empfindlich von der Wahl von V_{PN} abhängen, ergibt sich hierbei ein erfolgversprechender Ansatzpunkt für die Ermittlung der Proton-Neutron-Wechselwirkung in einem u-u-Kern.

II. Der modellmäßige Ansatz

Wir beschreiben einen deformierten u-u-Kern mit einem Modell, das aus einem starren, deformierten,

axialsymmetrischen g-g-Rumpf (Rumpfmasse = M_R) und zwei Außenteilchen, Proton und Neutron besteht. Als reduziertes System wählen wir unter Verzicht auf Anteile von der Größenordnung $(m_P/M_R)^2$ ein solches, in welchem der Koordinatenursprung im Mittelpunkt des Rumpfes liegt und die Außenteilchen die reduzierten Massen

$$\mu_P = \mu_N = \mu = m_P \cdot M_R / (m_P + M_R)$$

haben. Die Außenteilchen werden mit Koordinaten $r_P, \vartheta_P, \varphi_P, r_N, \vartheta_N, \varphi_N$ bezüglich eines am Rumpf hängenden $\xi - \eta - \zeta$ -Koordinatensystems beschrieben, dessen ζ -Achse die Symmetriearchse des Rumpfes ist. Diese dient auch als Quantisierungsachse für die Spins. Die Lage der in der Äquatoralebene liegenden ξ - und η -Achsen brauchen wir für das folgende nicht näher festzulegen. Die Orientierung dieses Systems bezüglich des raumfesten $X - Y - Z$ -Systems wird durch die drei Eulerschen Winkel α, β, γ bestimmt. [Die Eulerschen Winkel führen wir in der von ROSE¹⁰ angegebenen Art ein; das gleiche gilt für die Kreiseleigenfunktionen $D_{m,n}^l(\alpha, \beta, \gamma)$.] Das gesamte Gebilde, Rumpf und Außenteilchen, wird also durch die Koordinaten $r_P, \vartheta_P, \varphi_P, r_N, \vartheta_N, \varphi_N, \nu_P, \nu_N, \alpha, \beta, \gamma$ beschrieben, wobei ν_P und ν_N die Spinvariablen sind (siehe Abb. 1, S. 855).

Es hat die kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{p}_P^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{p}_N^2 + \frac{1}{2} \sum_t \frac{L_t^2}{\Theta_t} \quad (t = \xi, \eta, \zeta),$$

wobei L_ξ, L_η, L_ζ die Komponenten des Rumpfdrehimpulses \mathbf{L} , zerlegt auf körperfeste Achsen, und $\Theta_\xi, \Theta_\eta, \Theta_\zeta$ die Hauptträgheitsmomente des Rumpfes bezüglich dieser Achsen sind. Da \mathbf{J} und nicht \mathbf{L} eine Erhaltungsgröße ist, werden wir das in der kinetischen Energie auftretende \mathbf{L} durch \mathbf{J} und die Teilchengesamtimpulse \mathbf{j}_P und \mathbf{j}_N ausdrücken, wobei $\mathbf{j}_i = \mathbf{l}_i + \mathbf{s}_i$ ($i = P, N$) ist, und wir wieder Komponenten bezüglich des $\xi - \eta - \zeta$ -Systems betrachten.

Beim Übergang zur Quantenmechanik enthält der Operator des Gesamtimpulses \mathbf{J} bei unserer Koordinatenwahl nur die Eulerschen Winkel α, β, γ , ist also besonders einfach. Die Operatoren $\mathbf{j}_P, \mathbf{j}_N$ enthalten nur die entsprechenden Teilchenkoordinaten. Zusätzlich ist zu beachten, daß die Komponenten von \mathbf{j}_P und \mathbf{j}_N normale Vertauschungsrelationen, die von \mathbf{J} dagegen anomale Vertauschungsrelationen erfüllen¹¹.

Proton und Neutron bewegen sich in einem am Rumpf hängenden Nilsson-Potential $V_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{l}_i, \mathbf{s}_i)$,

($i = P, N$), und üben aufeinander die Restwechselwirkung V_{PN} aus, so daß wir folgenden Hamilton-Operator für unser Modell erhalten:

$$H = \frac{1}{2} \sum_t \frac{L_t^2}{\Theta_t} - \frac{\hbar^2}{2\mu} A_P + V_P(\mathbf{r}_P, \mathbf{l}_P, \mathbf{s}_P) \\ - \frac{\hbar^2}{2\mu} A_N + V_N(\mathbf{r}_N, \mathbf{l}_N, \mathbf{s}_N) + V_{PN}$$

Axialsymmetrie des Rumpfes bedeutet: $\Theta_\xi = \Theta_\eta = \Theta_0$. Mit $\mathbf{L} = \mathbf{J}_P - \mathbf{J}_N$ erhalten wir nach einer Umrechnung:

$$H = \frac{1}{2\Theta_0} \{ J^2 - J_\xi^2 - j_{P\xi}^2 - j_{N\xi}^2 \} \quad (1) \\ + \frac{L_z^2}{2\Theta_\xi} + H_P + H_N + H_c + V_{PN} = H_0 + H_c + V_{PN}.$$

Dabei bedeuten:

$$H_P = -\frac{\hbar^2}{2\mu} A_P + V_P(\mathbf{r}_P, \mathbf{l}_P, \mathbf{s}_P), \\ H_N = -\frac{\hbar^2}{2\mu} A_N + V_N(\mathbf{r}_N, \mathbf{l}_N, \mathbf{s}_N), \\ H_c = \frac{1}{2\Theta_0} \{ j_P^2 + j_N^2 - J_+ j_{P-} - J_- j_{P+} \\ - J_+ j_{N-} - J_- j_{N+} + j_{P+} j_{N-} + j_{P-} j_{N+} \}, \\ J_\pm = J_\xi \pm i J_\eta, j_{P\pm} = j_{P\xi} \pm i j_{P\eta}, j_{N\pm} = j_{N\xi} \pm i j_{N\eta}.$$

Nach dem oben gesagten sind die in H_c auftretenden Produktfaktoren sämtlich miteinander vertauschbar.

Da wir die Glieder $(1/2\Theta_0)(j_P^2 + j_N^2)$ zu H_c geschlagen haben, können wir im Gegensatz zu Davidson die Eigenfunktionen von H_0 mit Hilfe der Nilsson-Funktionen aufbauen, die ja Eigenfunktionen zu H_P bzw. H_N sind und die folgende Gestalt haben:

$$\psi_{\Omega_l}(\mathbf{r}_i v_i) = \sum_{l_i, \tau_i} N_{l_i, \tau_i}^{\bar{n}_i, \Omega_i} R_{n_i}^{l_i}(r_i) Y_{\Omega_i - \tau_i}^l(\vartheta_i, \varphi_i) \chi_{\tau_i}^{1/2}(v_i). \quad (2)$$

Dabei sind die $R_{n_i}^{l_i}(r_i)$ die Oszillatoreigenfunktionen zur Hauptquantenzahl \bar{n}_i .

Als Eigenfunktion zu den Operatoren $H_0, J^2, J_z, J_\xi, j_{P\xi}, j_{N\xi}, L_\xi$ erhalten wir dann:

$$F_{K, \Omega_P, \Omega_N}^{J, M} = \sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2}} D_{M, K}^J(a, \beta, \gamma) \psi_{\Omega_P}(\mathbf{r}_P, v_P) \\ \cdot \psi_{\Omega_N}(\mathbf{r}_N, v_N). \quad (3)$$

Der axialsymmetrische g-g-Rumpf soll nicht um seine Symmetriearchse, die ξ -Achse, rotieren. Deshalb setzen wir $L'_\xi = K - \Omega_P - \Omega_N = 0$, und es gilt stets: $K = \Omega_P + \Omega_N$. Energetisch entartet zu obiger Funktion ist $F_{-K, -\Omega_P, -\Omega_N}^{J, M}$. Da sich der gesamte Hamilton-Operator und auch der Anteil H_0 bei einer Dre-

hung R_1 des Rumpfes um 180° um eine beliebige, zur ξ -Achse senkrechte Achse in der Äquatorebene nicht ändert, muß unsere Wellenfunktion zu einer Eigenfunktion von R_1 gemacht werden. Wegen

$$R_1 F_{K, \Omega_P, \Omega_N}^{J, M} = (-1)^{J - \bar{n}_P - \bar{n}_N - 1} F_{-K, -\Omega_P, -\Omega_N}^{J, M}$$

ergibt sich dann folgende Eigenfunktion zu H_0 und R_1 :

$$|J, M, K, |\Omega_P|, |\Omega_N|, u\rangle = F_{K, \Omega_P, \Omega_N}^{J, M} \\ + u (-1)^{J - \bar{n}_P - \bar{n}_N - 1} F_{-K, -\Omega_P, -\Omega_N}^{J, M}. \quad (4)$$

Dabei ist $u = \pm 1$ die Quantenzahl zu R_1 . Außerdem sind mit $K \geq 0$ bereits alle linear unabhängigen Eigenfunktionen von H_0 erfaßt.

Wir fragen zunächst, ob beide, beziehungsweise welche der beiden Linearkombinationen für unser Modell in Frage kommen. Schreibt man die Funktion $|J, M, K, |\Omega_P|, |\Omega_N|, u\rangle$ in auf das raumfeste System bezogenen Koordinaten, so läßt sie sich nach den Eigenfunktionen zu L^2, L_z, L_ξ , den $D_{M-m_{PN}, 0}^L(a, \beta, \gamma)$ entwickeln

$$|J, M, K, |\Omega_P|, |\Omega_N|, u\rangle \\ = \sum_{L, j_{PN}, m_{PN}} A_{m_{PN}}^{L, j_{PN}} D_{M-m_{PN}, 0}^L(a, \beta, \gamma) |j_{PN}, m_{PN}\rangle.$$

Hierbei ist $|j_{PN}, m_{PN}\rangle$ eine Funktion, die nur von auf das raumfeste System bezogenen Koordinaten abhängt und deren Spins die raumfeste Z-Achse als Quantisierungssachse haben. Wegen

$$R_1 |J, M, K, |\Omega_P|, |\Omega_N|, u\rangle = u |J, M, K, |\Omega_P|, |\Omega_N|, u\rangle \\ = \sum_{L, j_{PN}, m_{PN}} u \cdot A_{m_{PN}}^{L, j_{PN}} D_{M-m_{PN}, 0}^L(a, \beta, \gamma) |j_{PN}, m_{PN}\rangle \\ = R_1 \sum_{L, j_{PN}, m_{PN}} A_{m_{PN}}^{L, j_{PN}} D_{M-m_{PN}, 0}^L(a, \beta, \gamma) |j_{PN}, m_{PN}\rangle \\ = \sum_{L, j_{PN}, m_{PN}} (-1)^L A_{m_{PN}}^{L, j_{PN}} D_{M-m_{PN}, 0}^L(a, \beta, \gamma) |j_{PN}, m_{PN}\rangle$$

ergibt sich:

Für $u = +1$ enthält die Summe nur gerade, für $u = -1$ nur ungerade L -Werte. Wenn wir annehmen, daß sich der g-g-Rumpf wie ein freier g-g-Kern verhält, kommt nur eine Entwicklung über gerade L in Frage, und u ist dann zwangsläufig gleich $+1$. (Für eine mikroskopische Begründung dieser Tatsache sei auf RUDER¹² verwiesen.)

Deshalb benutzen wir im folgenden die unter R_1 symmetrische Wellenfunktion, wie es allgemein, allerdings ohne nähere Begründung, getan wird.

Bei der Betrachtung der Parität unserer Wellenfunktion muß man beachten, daß sich eine Spiegelung am Ursprung nur bei den beiden Außenteilchen und nicht bei dem in unserem Modell als starr und

strukturlos vorausgesetzten Rumpf durchführen läßt. Da sich der Rumpf in dieser Hinsicht jedoch wie ein freier g-g-Kern verhalten soll, und ein solcher bei den hier auftretenden geradzahligen L -Werten positive Parität besitzt, folgt, daß die Gesamtparität Π des Systems durch das Produkt der Paritäten der Außenteilchen zu $\Pi = (-1)^{n_p + n_N}$ gegeben ist.

Berechnen wir zunächst die Energieniveaus von H_0 . Bei einer bestimmten Einteilchenenergie von H_P bzw. H_N befindet sich das Proton bzw. Neutron in einem Nilsson-Niveau mit $\Omega_P = \pm |\Omega_P|$ bzw. $\Omega_N = \pm |\Omega_N|$, weil die Einteilchenenergie $E_P(|\Omega_P|)$ bzw. $E_N(|\Omega_N|)$ nur von $|\Omega_P|$ bzw. $|\Omega_N|$ und nicht von deren Vorzeichen abhängt. Wegen $K = |\Omega_P + \Omega_N|$ erhalten wir bei gleichen Einteilchenenergien zwei Möglichkeiten für K , nämlich:

$$K_- = |\Omega_P| - |\Omega_N| \quad \text{und} \quad K_+ = |\Omega_P| + |\Omega_N|. \quad (5)$$

Auf Grund der Struktur von H_0 bekommen wir je eine Rotationsbande, die mit K_- oder K_+ indiziert ist. In jeder dieser Rotationsbanden gilt: $J \geq K_{\mp}$. Der J -Wert des Bandenkopfs ist dann K_{\mp} selbst.

Im Grundzustand eines u-u-Kerns sitzen Proton und Neutron in den energetisch tiefsten nach dem Pauli-Prinzip erlaubten Nilsson-Niveaus mit den Quantenzahlen $|\Omega_P|$ und $|\Omega_N|$. Der Grundzustand des Gesamtsystems ist dann immer der Bandenkopf der K_- -Bande, wogegen der Bandenkopf der entsprechenden K_+ -Bande um die Energiedifferenz

$$\Delta E_{\pm} = (\hbar^2/2\Theta_0) (K_+ - K_-) \quad (6)$$

höher liegt.

Die Betrachtung von H_0 allein liefert also – ohne Bezugnahme⁸ auf irgendwelche Kopplungsregeln – stets die eindeutige Regel, daß der Bandenkopf der K_- -Bande, die sich auf die niedrigstmöglichen Einteilchenenergenniveaus aufbaut, der Grundzustand ist. Für einen Vergleich mit dem experimentellen Befund ist diese Aussage, ebenso wie die folgenden, nur von vorläufiger Natur, da V_{PN} noch nicht berücksichtigt ist.

Für den Energieabstand von Niveaus der K_- - und K_+ -Banden, die sich auf den gleichen Nilsson-Niveaus wie der Grundzustand aufbauen, erhalten wir:

$$\Delta E(J, K_{\mp}) = (\hbar^2/2\Theta_0) \{J(J+1) - K_{\mp}^2 - K_- \}. \quad (7)$$

Neben einer Anregung des u-u-Kerns in Form einer Rotationsbande kann auch eine Einteilchenanregung

von Proton bzw. Neutron in energetisch höher gelegene Nilsson-Niveaus mit den Quantenzahlen $|\Omega'_P|$ bzw. $|\Omega'_N|$ erfolgen. Auf diese Niveaus bauen sich die K'_- und K'_+ -Rotationsbanden auf, wobei der Abstand der Bandenköpfe

$$\Delta E'_{\mp} = \frac{\hbar^2}{2\Theta'_0} (K'_+ - K'_-) \quad (8)$$

beträgt und der Abstand eines Niveaus dieser Banden vom Grundzustand durch die Formel

$$\begin{aligned} \Delta E'(J, K'_{\mp}) = & \frac{\hbar^2}{2\Theta'_0} \{J(J+1) - K'^2_{\mp} - |\Omega'_P|^2 - |\Omega'_N|^2\} \\ & + E_P(|\Omega'_P|) + E_N(|\Omega'_N|) \quad (9) \\ & + \frac{\hbar^2}{2\Theta'_0} \{|\Omega_P|^2 + |\Omega_N|^2 - K_-\} \\ & - E_P(|\Omega_P|) - E_N(|\Omega_N|) \end{aligned}$$

gegeben ist. Durch die in den letzten beiden Formeln auftretende Größe Θ'_0 berücksichtigen wir die Tatsache, daß die Deformation und damit das Trägheitsmoment des Rumpfes von den ins Spiel kommenden Einteilchenzuständen abhängen kann.

Als nächster Punkt ist nun die Wirkung des Kopplungsterms H_c zu untersuchen. H_c hat die folgende Gestalt:

$$H_c = \frac{1}{2\Theta_0} \{j_P^2 + j_N^2 - J_+ j_{P-} - J_- j_{P+} \\ - J_+ j_{N-} - J_- j_{N+} + j_{P+} j_{N-} + j_{P-} j_{N+}\}.$$

Wegen der anomalen Vertauschungsrelationen schrauben die Operatoren J_{\pm} umgekehrt wie die Operatoren $j_{P\pm}$ bzw. $j_{N\pm}$. Deshalb liefert Anwendung von H_c auf eine Wellenfunktion von H_0 mit der Quantenzahl $L'_\zeta = 0$ wieder eine solche, da bei Wirkung der Operatoren $J_{\pm} j_{P\mp}$, $J_{\pm} j_{N\mp}$ oder $j_{P\pm} j_{N\mp}$ die Quantenzahl $L'_\zeta = K - \Omega_P - \Omega_N$ konstant bleibt. Man kommt also durch H_c nicht aus dem Raum der Wellenfunktionen mit $L'_\zeta = 0$ heraus, so daß unsere Eigenfunktionen von H_0 , die $|J, M, K, |\Omega_P|, |\Omega_N|, \Pi\rangle$, ein vollständiges System von Basisfunktionen auch bei Einschluß von H_c bleiben.

Wegen der Form von H_c ist es sinnvoll, die Wellenfunktionen nach Eigenfunktionen $\Phi_{\Omega_P}^{j_P}$ bzw. $\Phi_{\Omega_N}^{j_N}$ zu j_P^2 , $j_P \zeta$ bzw. j_N^2 , $j_N \zeta$ zu entwickeln:

$$|J, M, K, |\Omega_P|, |\Omega_N|, \Pi\rangle = \sum_{l_P, l_N, j_P, j_N, \tau_P, \tau_N} NC_{\Omega_P, \tau_P}^{l_P, j_P} NC_{\Omega_N, \tau_N}^{l_N, j_N} \\ \cdot \{D_{M, K}^J \Phi_{\Omega_P}^{j_P} \Phi_{\Omega_N}^{j_N} + (-1)^{J - j_P - j_N} D_{M, -K}^J \Phi_{-\Omega_P}^{j_P} \Phi_{-\Omega_N}^{j_N}\}.$$

Dabei sind die Entwicklungskoeffizienten $NC_{\Omega_i, \tau_i}^{l_i, j_i}$ ($i = P, N$) je ein Produkt aus einem Nilsson-Koeffizienten und einem Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

Falls die Matrixelemente von H_c klein gegenüber auftretenden Einteilchenenergiedifferenzen sind, ist eine Störungsrechnung bis zur zweiten Ordnung hinreichend. Ob diese Voraussetzung erfüllt ist, ist natürlich im Einzelfall nachzuprüfen.

In Störungsrechnung erster Ordnung müssen wir Diagonalelemente von H_c betrachten. Die Operatoren j_P^2 und j_N^2 liefern J -unabhängige Diagonalelemente $\varepsilon_P(|\Omega_P|)$ und $\varepsilon_N(|\Omega_N|)$, die für zusammengehörige K_- - und K_+ -Banden gleich sind und beide Banden als Ganzes versetzen. Man kann diese Diagonalelemente daher den Nilsson-Energien zuschlagen. Operatoren der Art $J_{\pm} j_{P \mp}$, $J_{\pm} j_{N \mp}$ liefern keine Diagonalelemente, da Nichtmischelemente (vorderer Teil der symmetrisierten Wellenfunktion mal vorderer Teil bzw. hinterer Teil mal hinterer Teil) wegen der Orthogonalität der $D_{M,K}^J$ verschwinden, und die bei $K = \frac{1}{2}$ -Banden auftretenden Mischelemente (vorderer Teil der symmetrisierten Wellenfunktion mal hinterer Teil und umgekehrt) wegen der Ganzzahligkeit von K bei einem u-u-Kern nicht möglich sind. Wegen der Orthogonalität der $\Phi_{\Omega_P}^{j_P}$ bzw. $\Phi_{\Omega_N}^{j_N}$ treten auch bei den Operatoren $j_P^+ j_N^-$ und $j_P^- j_N^+$ keine Nichtmischelemente auf, und nur im speziellen Fall $K = 0$ und $|\Omega_P| = |\Omega_N| = \frac{1}{2}$ – der bei ^{166}Ho nicht vorliegt –, erhält man ein J -abhängiges Mischelement, das wir mit $\gamma(J)$ bezeichnen. Störungsrechnung erster Ordnung liefert also zusammengefaßt:

$$\langle H_c \rangle = \varepsilon_P(|\Omega_P|) + \varepsilon_N(|\Omega_N|) + \gamma(J) \delta_{K,0} \delta_{|\Omega_P|, \frac{1}{2}} \delta_{|\Omega_N|, \frac{1}{2}}.$$

Bei Störungsrechnung zweiter Ordnung für den Zustand mit der Quantenzahl

$$R = (J, M, K, |\Omega_P|, |\Omega_N|, \Pi, N_i) \\ (\text{wobei } N_i = \text{Nilsson-Nummer})$$

erhält man die Zusatzenergie:

$$\varepsilon_{cR}^{(2)} = \sum_{R' \neq R} \frac{|\langle H_c \rangle_{R,R'}|^2}{E_{0R} - E_{0R'}} ,$$

wobei $R' = (J', M', K', |\Omega'_P|, |\Omega'_N|, \Pi', N'_i)$ und E_{0R} bzw. $E_{0R'}$ die Energien von H_0 sind. Dabei sind, außer im Fall, daß $K = 0$, $|\Omega_P| = |\Omega_N| = \frac{1}{2}$ ist, alle mit R' bezeichneten Zustände, die nichtverschwindende Matrixelemente $\langle H_c \rangle_{R,R'}$ liefern, dadurch ausgezeichnet, daß Proton oder Neutron oder beide im R' -Zustand in einem anderen Nilsson-Niveau als im R -Zustand sitzen, und somit im Nenner Einteilchenenergiedifferenzen stehen, die nach unserer Voraussetzung groß gegenüber den Matrixelementen von H_c sind. Insbesondere sind Matrixelemente zwischen

Niveaus von zusammengehörigen K_- - und K_+ -Banden bis auf obigen speziellen Fall ($K_- = 0, K_+ = 1$) grundsätzlich Null.

Ganz allgemein läßt sich zeigen, daß H_c in zweiter Ordnung einen $J(J+1)$ -abhängigen Energiebeitrag liefert¹². Das bedeutet, daß nach wie vor eine Rotationsbandenstruktur auftritt, welche sich mit einem geeigneten Θ_{eff} erfassen läßt.

Wir gewinnen also die Energie einschließlich des Einflusses von H_c bis zur zweiten Ordnung, indem wir in den Erwartungswerten von H_0 an Stelle der Nilsson-Energien $E_i(|\Omega_i|)$ die modifizierten Nilsson-Energien $E'_i(|\Omega_i|) = E_i(|\Omega_i|) + \varepsilon_i(|\Omega_i|)$ und an Stelle von Θ_0 den Wert Θ_{eff} einsetzen.

Wenn andererseits die Matrixelemente von H_c von gleicher Größenordnung wie die Energienenner sind, dann werden verschiedene zu H_0 gehörige Rotationsbanden miteinander vermischt, wodurch ihre $J(J+1)$ -Abhängigkeit mehr oder weniger stark zerstört wird. Man kann als schon dem experimentellen Material entnehmen, ob die Störungsrechnung in unserer Form berechtigt ist.

III. Anwendung auf ^{166}Ho

Das experimentelle Spektrum von ^{166}Ho ist in Abb. 2 dargestellt. Für die $K = 0$ - und $K = 7$ -Bande ist $\Theta_{\text{eff}} = 56,5 \text{ } \hbar^2/\text{MeV}$ und für die $K = 3$ - und $K = 4$ -Bande ist $\Theta'_{\text{eff}} = 57,3 \text{ } \hbar^2/\text{MeV}$. Der Unterschied zwischen den beiden Trägheitsmomenten ist nach unseren vorigen Überlegungen nicht erstaunlich.

Bei der Ermittlung des theoretischen Spektrums nimmt man zunächst die Terme H_0 und H_c mit, wo bei H_0 vier unverzerrte Rotationsbanden liefert. Die Diagonalelemente von H_c sind für zusammengehörige K_- - und K_+ -Banden, wie die $K = 0$ - und $K = 7$ -bzw. die $K = 3$ - und $K = 4$ -Banden, jeweils gleich und verändern lediglich die Nilsson-Energien um $\varepsilon_P(|\Omega_P|)$ bzw. $\varepsilon_N(|\Omega_N|)$. Sie bewirken keinen odd-even-shift und lassen auch die uns interessierenden Energieabstände zwischen den Bandenköpfen zusammengehöriger K_- - und K_+ -Banden gegenüber dem durch H_0 gegebenen Wert unverändert. Jede der experimentellen Banden oder Teilbanden hat eine saubere Rotationsbandenstruktur. Wir können daraus entnehmen, daß durch Veränderung von Θ_0 in den aus dem Experiment entnommenen Wert Θ_{eff} auch der Beitrag von H_c bis zur zweiten Ordnung vollständig erfaßt ist. Als vorläufiges theoretisches Spektrum (Berücksichtigung der Terme H_0 und H_c) er-

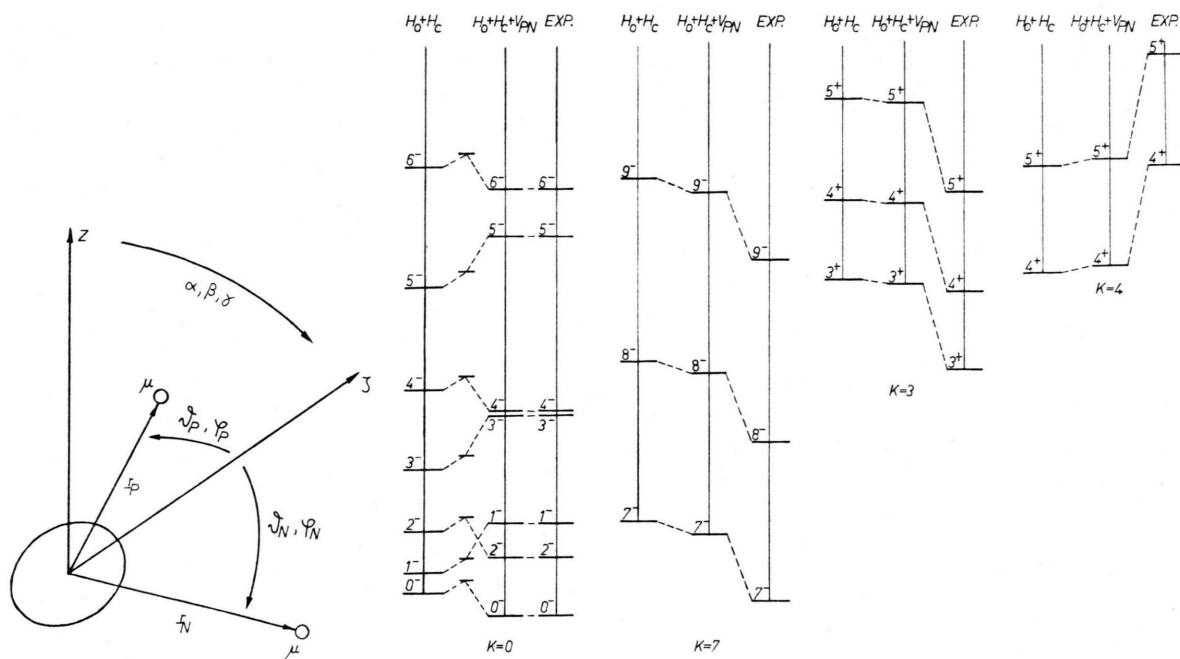


Abb. 1. Reduziertes System für einen u-u-Kern.

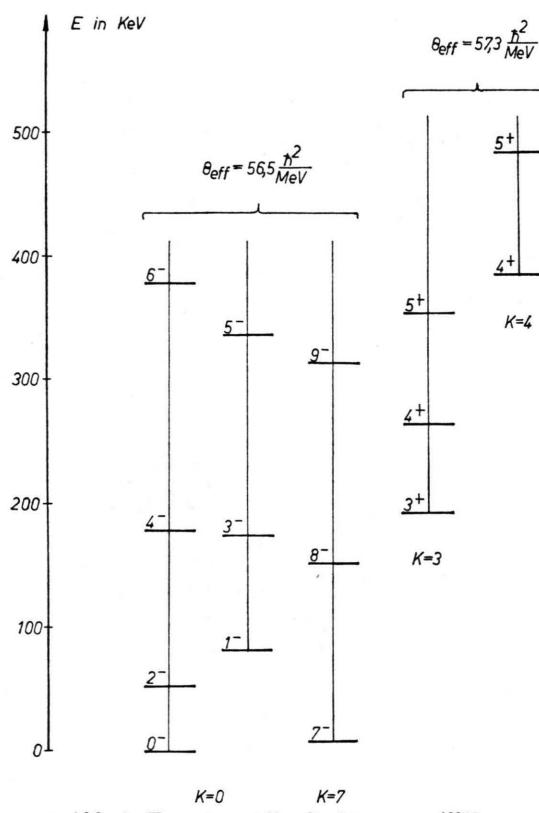
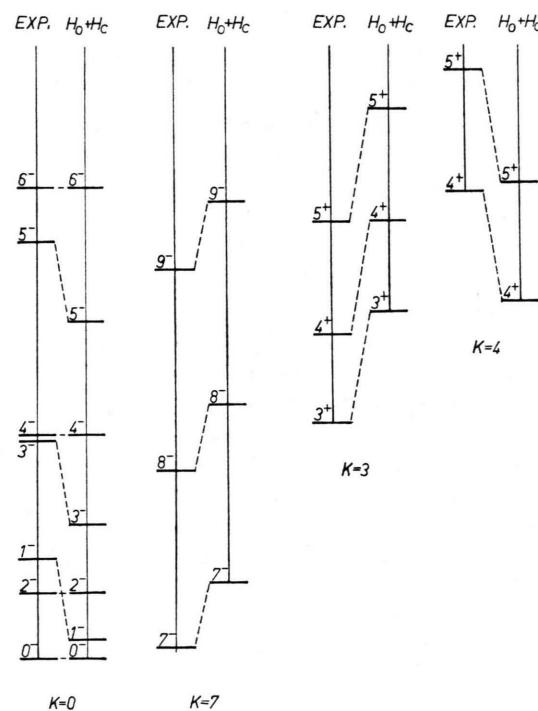
Abb. 2. Experimentelles Spektrum von ^{166}Ho .

Abb. 4. Energiespektrum von $H_0 + H_c$ und durch Hinzunahme von V_{PN} verbessertes theoretisches Spektrum im Vergleich mit dem Experiment. (In dem gestrichelten Streckenzug zwischen der 1. und der 2. Leiter in der $K=0$ -Bande bedeutet der 1. Schritt die allen Niveaus gemeinsame Wirkung von A_0 , der 2. Schritt den Beitrag von $(-1)^J B_0$.)

Abb. 3. Energiespektrum von $H_0 + H_c$ im Vergleich mit dem Experiment.

halten wir also das mit H_0 zu erwartende Spektrum (Θ_0 ersetzt durch Θ_{eff}) mit modifizierten Nilsson-Energien, die wir jedoch nicht berechnen, sondern dem Experiment entnehmen.

Abb. 3 zeigt nun zwei wesentliche Diskrepanzen zwischen dem experimentellen und diesem theoretischen Spektrum:

1. Das experimentelle Spektrum zeigt in der $K=0$ -Bande den Effekt des odd-even-shifts.

2. Der Abstand zwischen den Bandenköpfen zusammengehöriger K_- - und K_+ -Banden, in welchen bis jetzt außer dem bereits festliegenden Θ_{eff} bzw. Θ'_{eff} keine weiteren Parameter eingehen, ergibt sich theoretisch bei den Banden mit $K=0$ und $K=7$ um das 7-fache zu groß, bei den Banden mit $K=3$ und $K=4$ um das 20-fache zu klein.

Unsere weitere Aufgabe ist es zu untersuchen, ob es durch die Hinzunahme der Restwechselwirkung V_{PN} möglich ist, diese Diskrepanzen zu beseitigen oder zumindest qualitativ zu verstehen.

Als Restwechselwirkung zwischen dem unpaarigen Proton und Neutron hängt V_{PN} nur von den Koordinaten \mathbf{r}_P , \mathbf{r}_N sowie den Spins \mathbf{s}_P , \mathbf{s}_N der beiden Außenteilchen und nicht von α , β , γ ab. Das hat zur Folge:

Für K_{\pm} -Banden mit $K \neq 0$ erhält man zum Diagonalelement wegen der Orthogonalität zwischen den $D_{M,K}^J$ des vorderen Anteils und den $D_{M,-K}^J$ des hinteren Anteils der symmetrisierten Wellenfunktion (4) nur einen Beitrag A_K , bei dem vorderer und hinterer Anteil nicht gemischt werden. Dieser Beitrag ist J -unabhängig und enthält insbesondere nicht den Faktor $(-1)^J$, so daß dadurch die Rotationsbandenstruktur innerhalb einer Bande nicht zerstört wird und deshalb in Banden mit $K \neq 0$ kein odd-even-shift auftreten kann. Allerdings ist A_K K -abhängig, kann also für K_- - und K_+ -Banden verschieden sei und somit zu einer Versetzung dieser Banden gegeneinander führen. Nur in $K=0$ -Banden ist obige Orthogonalität nicht vorhanden, und zum Beitrag A_0 kommt noch ein Mischelement $(-1)^J B_0$ hinzu. Da B_0 keine J -Abhängigkeit besitzt, bewirkt der Faktor $(-1)^J$ eine konstante Versetzung der Niveaus mit geradem J gegenüber denen mit ungeradem J um $2B_0$.

Wie im Anhang gezeigt wird, liefert eine beliebige, nur vom Relativabstand zwischen Proton und Neutron abhängige Wechselwirkung der Form

$$V_{\text{PN}} = V(|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_N|) \quad (10)$$

für das Mischelement den Wert $B_0 = 0$ und für zusammengehörige K_- - und K_+ -Banden das gleiche Diagonalelement ($A_{K^-} = A_{K^+}$), so daß mit einem solchen Ansatz für V_{PN} weder der odd-even-shift noch die falsche gegenseitige Lage der Bandenköpfe zusammengehöriger K_- - und K_+ -Banden erklärt werden können. Das experimentelle Spektrum zwingt uns also, unseren Ansatz zu erweitern. Wir setzen:

$$V_{\text{PN}} = V(|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_N|) \{1 - \alpha + \alpha \mathbf{s}_P \mathbf{s}_N\}. \quad (11)$$

Um qualitativ die Wirkung eines solchen Ansatzes für V_{PN} zu untersuchen, nehmen wir für die Ortsabhängigkeit ein δ -funktionsförmiges Potential:

$$V_{\text{PN}} = V_0 \lambda^{-3/2} \delta(|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_N|) \{1 - \alpha + \alpha \mathbf{s}_P \mathbf{s}_N\} \quad (12)$$

(V_0 = Stärkeparameter, $\lambda = \mu \omega / \hbar$).

Mit diesem Ansatz werden für ^{166}Ho die folgenden Matrixelemente berechnet:

$$\begin{aligned} & \langle J, M, 7, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, -1 | V_{\text{PN}} | J, M, 7, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, -1 \rangle \\ &= A_7 = V_0 \{(1 - \alpha) \cdot 0,01575 + \alpha \cdot 0,00247\}, \\ & \langle J, M, 0, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, -1 | V_{\text{PN}} | J, M, 0, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, -1 \rangle \\ &= A_0 + (-1)^J B_0 \\ &= V_0 \{(1 - \alpha) \cdot 0,01575 - \alpha \cdot 0,00247\} \\ & \quad + (-1)^J V_0 \alpha \cdot 0,00641, \\ & \langle J, M, 4, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, +1 | V_{\text{PN}} | J, M, 4, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, +1 \rangle \\ &= A_4 = V_0 \{(1 - \alpha) \cdot 0,00743 - \alpha \cdot 0,00025\}, \\ & \langle J, M, 3, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, +1 | V_{\text{PN}} | J, M, 3, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, +1 \rangle \\ &= A_3 = V_0 \{(1 - \alpha) \cdot 0,00743 + \alpha \cdot 0,00025\}. \end{aligned}$$

Man sieht, daß in die für die fraglichen Effekte maßgebenden Matrixelemente nur das Produkt $V_0 \alpha$ ein geht. Wenn wir so vorgehen, daß wir den odd-even-shift durch geeignete Wahl von $V_0 \alpha$ dem Experiment anpassen, dann bewirken die Spin-Spin-Terme von A_0 und A_7 bzw. von A_3 und A_4 zunächst eine globale Versetzung der betreffenden Banden gegenübereinander, die qualitativ in beiden Fällen in der richtigen Richtung erfolgt, jedoch quantitativ noch zu klein ist. Bei dieser Aussage ist die Wirkung von B_0 noch nicht berücksichtigt. Bei dem von uns verwendeten speziellen Ansatz für V_{PN} bewirkt der von B_0 verursachte odd-even-shift, daß die Bandenköpfe der $K=0$ - und der $K=7$ -Bande noch etwas weiter auseinanderrücken als zuvor.

Das durch die Hinzunahme von V_{PN} verbesserte theoretische Spektrum ist ohne die durch den reinen Ortsterm bewirkten gemeinsamen Versetzungen zusammengehöriger K_- - und K_+ -Banden in Abb. 4 dargestellt. Dabei wurde der 0^- -Zustand in diesem

und im experimentellen Spektrum auf den Energienullpunkt gelegt und die relative Lage der K_{\mp} -Banden (0, 7) gegenüber den K'_{\mp} -Banden (3, 4) nicht durch die Differenz der modifizierten Nilsson-Energien und der vom reinen Ortsterm von V_{PN} herrührenden Störennergien, sondern durch die experimentelle Energiedifferenz festgelegt.

Betrachtet man den experimentellen Tatbestand im Hinblick auf die Frage, welchen Einfluß von V_{PN} man annehmen muß, damit das experimentelle Spektrum zustande kommt, so erkennt man, daß V_{PN} in zweifacher Weise wirken muß:

Zum einen verschiebt V_{PN} durch die Nichtmischterme A_0 und A_7 die gesamten $K=0$ - und $K=7$ -Banden in der Richtung gegeneinander, daß bei genügender Stärke die durch H_0 gegebene Energiedifferenz von $7\hbar^2/2\Theta_{\text{eff}}$ überwunden werden könnte und das 7^- -Niveau der Grundzustand werden könnte, wie es die Kopplungsregeln von Gallagher und Moszkowski fordern.

Zum anderen bewirkt jedoch das nur in der $K=0$ -Bande auftretende Mischelement $(-1)^J B_0$ eine Aufspaltung der $K=0$ -Bande in Teilbanden, wobei die Teilbande mit geradem J nach unten versetzt wird und somit das 0^- -Niveau wieder tiefer rutscht und Grundzustand wird.

Die große durch H_0 gegebene Rotationsenergiedifferenz von $7\hbar^2/2\Theta_{\text{eff}}$ und das Auftreten des odd-even-shifts bewirken also beim ^{166}Ho eine Durchbrechung der Kopplungsregeln. Man erkennt, daß dieses Ergebnis daran gebunden ist, daß es sich beim Grundzustand um den Bandenkopf einer $K=0$ -Bande handelt.

Im ganzen können wir feststellen, daß für das Zustandekommen des experimentellen Spektrums die Restwechselwirkung V_{PN} von entscheidender Bedeutung ist. Schon der einfache Ansatz einer δ -funktionsförmigen Wechselwirkung führt uns wenigstens zu einem qualitativen Verständnis der charakteristischen Eigenschaften dieses Spektrums. Eine quantitative Übereinstimmung ist mit diesem modellmäßigen Ansatz natürlich nicht zu erwarten. Unsere Ergebnisse lassen es aber als eine lohnende Aufgabe erscheinen, zu untersuchen, ob eine realistische Proton-Neutron-Wechselwirkung zu einem quantitativen Verständnis des Energiespektrums führt. Dies soll einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben.

IV. Anhang

Es wird zunächst das Problem untersucht, warum das Mischelement $(-1)^J B_0$ von V_{PN} bei einer reinen Ortswechselwirkung stets Null wird. Mit den Bezeichnungen

$$|1\rangle = F_{0,\Omega_P,\Omega_N}^{J,M} \quad |2\rangle = (-1)^{J-\bar{n}_P-\bar{n}_N-1} F_{0,-\Omega_P,-\Omega_N}^{J,M}$$

erhalten wir:

$$|+\rangle = |J, M, O, |\Omega_P|, |\Omega_N|, \pi\rangle = |1\rangle + |2\rangle; \\ |-\rangle = |1\rangle - |2\rangle.$$

Das Mischelement $M = (-1)^J B_0$ hat dann die Gestalt:

$$M = \langle 1 | V_{\text{PN}} | 2 \rangle + \langle 2 | V_{\text{PN}} | 1 \rangle \\ = \frac{1}{2} \{ \langle + | V_{\text{PN}} | + \rangle - \langle - | V_{\text{PN}} | - \rangle \}.$$

Es wird Null, wenn:

$$\langle + | V_{\text{PN}} | + \rangle = \langle - | V_{\text{PN}} | - \rangle.$$

Um diese Gleichheit für eine reine Ortswechselwirkung zu zeigen, betrachten wir folgenden Operator O :

$$O = \frac{1}{(|\Omega_P|+|\Omega_N|)} \frac{1}{\hbar} (j_{P\xi} - j_{N\xi}).$$

Dieser Operator hat folgende Eigenschaften:

$$O |1\rangle = |1\rangle; O |2\rangle = -|2\rangle \\ \Rightarrow O |+\rangle = |-\rangle; O |-\rangle = |+\rangle; \quad O^{-1} = O.$$

Dann gilt:

$$\langle + | O V_{\text{PN}} O | + \rangle = \langle - | V_{\text{PN}} | - \rangle.$$

Wenn man nun zeigen kann, daß O unter dem Integral mit V_{PN} vertauschbar ist, dann folgt:

$$\langle + | O V_{\text{PN}} O | + \rangle \\ = \langle + | O O V_{\text{PN}} | + \rangle = \langle + | V_{\text{PN}} | + \rangle.$$

Aus den beiden letzten Formeln erhält man dann die Bedingung, wegen der das Mischelement Null wird, nämlich:

$$\langle - | V_{\text{PN}} | - \rangle = \langle + | O V_{\text{PN}} O | + \rangle = \langle + | V_{\text{PN}} | + \rangle.$$

Das Problem reduziert sich damit auf die Untersuchung der Vertauschbarkeit von V_{PN} mit O unter dem Integral. Da O die folgende explizite Gestalt hat

$$O = \frac{1}{(|\Omega_P|+|\Omega_N|)} \frac{1}{\hbar} \{ (l_{P\xi} - l_{N\xi}) + (s_{P\xi} - s_{N\xi}) \} \\ = \frac{1}{(|\Omega_P|+|\Omega_N|)} \frac{1}{\hbar} \{ O_l + O_s \}$$

und der reine Spinoperator O_s mit der Ortsfunktion V_{PN} vertauschbar ist, genügt es, die Vertauschbar-

keit von O_l mit V_{PN} zu zeigen. Man muß also die Größe

$$I = \langle + | O_l V_{PN} - V_{PN} O_l | + \rangle$$

untersuchen. Wegen

$$O_l = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_P} - \frac{\partial}{\partial \varphi_N} \right)$$

erhält man mit $\varphi_P = \varphi + u$, $\varphi_N = \varphi - u$

$$O_l = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial u}.$$

Da V_{PN} nur vom Relativabstand

$$r = |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_N| = \sqrt{r_P^2 + r_N^2 - 2 r_P r_N (\cos \vartheta_P \cos \vartheta_N - \sin \vartheta_P \sin \vartheta_N \cos 2u)}$$

abhängt, ist V_{PN} bezüglich u eine gerade Funktion und ihre Ableitung nach u eine ungerade Funktion. Für die zu untersuchende Größe I erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\hbar}{i} \langle + | \frac{\partial}{\partial u} V_{PN} - V_{PN} \frac{\partial}{\partial u} | + \rangle \\ &= \frac{\hbar}{i} \langle + | \left(\frac{\partial}{\partial u} V_{PN} \right) | + \rangle. \end{aligned}$$

Nach der Spinsummation ergeben die beiden äußeren Faktoren insgesamt eine in u gerade Funktion. Da u von $-\pi$ bis $+\pi$ läuft, ergibt sich hieraus sofort $I = 0$.

Man sieht, daß dieser Beweis für das Verschwinden von M wesentlich an die reine Ortsabhängigkeit von V_{PN} gebunden ist.

Die Behauptung, daß eine reine Ortswechselwirkung V_{PN} für alle Niveaus von zusammengehörigen K_- - und K_+ -Banden die gleichen Matrixelemente liefert, kann durch genaue Betrachtung der Wellenfunktionen bewiesen werden. Die Wellenfunktionen

$$|J, M, K_-, |\Omega_P|, |\Omega_N|, \pi\rangle = |K_-\rangle$$

$$\text{und } |J, M, K_+, |\Omega_P|, |\Omega_N|, \pi\rangle = |K_+\rangle$$

unterscheiden sich außer im $D_{M,K}^J$ -Term, der jedoch in beiden Fällen bei der Integration zusammen mit dem jeweiligen Normierungsfaktor Eins ergibt, nur im Winkel- und Spinfunktionenanteil des Neutrons. Diesen Anteil des ersten Terms der symmetrierten Wellenfunktion wollen wir hier kurz mit $|K_\pm, 1\rangle$ bezeichnen. Den Anteil des zweiten Terms nennen wir kurz $|K_\pm, 2\rangle$. Explizit haben diese Anteile die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} |K_+, 1\rangle &= Y_{|\Omega_N| - \tau_N}^{l_N}(\nu_N), (\vartheta_N, \varphi_N) \chi_{\tau_N}^{\frac{1}{2}}(\nu_N) = P_{|\Omega_N| - \tau_N}^{l_N}(\vartheta_N) e^{i(|\Omega_N| - \tau_N) \varphi_N} \chi_{\tau_N}^{\frac{1}{2}}(\nu_N), \\ |K_+, 2\rangle &= Y_{-|\Omega_N| + \tau_N}^{l_N}(\vartheta_N, \varphi_N) \chi_{-\tau_N}^{\frac{1}{2}}(\nu_N) = P_{-|\Omega_N| + \tau_N}^{l_N}(\vartheta_N) e^{i(-|\Omega_N| + \tau_N) \varphi_N} \chi_{-\tau_N}^{\frac{1}{2}}(\nu_N), \\ |K_-, 1\rangle &= Y_{-|\Omega_N| + \tau_N}^{l_N}(\vartheta_N, \varphi_N) \chi_{-\tau_N}^{\frac{1}{2}}(\nu_N) = (-1)^{|\Omega_N| - \tau_N - l_N} P_{-|\Omega_N| - \tau_N}^{l_N}(\vartheta_N) e^{i(-|\Omega_N| + \tau_N) \varphi_N} Y_{|\Omega_N| - \tau_N}^{l_N}(\nu_N), \\ |K_-, 2\rangle &= Y_{|\Omega_N| - \tau_N}^{l_N}(\vartheta_N, \varphi_N) \chi_{\tau_N}^{\frac{1}{2}}(\nu_N) = (-1)^{-|\Omega_N| + \tau_N - l_N} P_{-|\Omega_N| + \tau_N}^{l_N}(\vartheta_N) e^{i(|\Omega_N| - \tau_N) \varphi_N} \chi_{\tau_N}^{\frac{1}{2}}(\nu_N). \end{aligned}$$

Wegen der obigen Überlegungen erhält man für eine Terme A_{K_-} und A_{K_+} . Diese sind komplizierte Viel- K_- und K_+ jedoch nur in den Anteilen unterschiedlichen Wellenfunktionsanteilen integriert wird.

Diese auftretenden Teilingtegrale haben die Gestalt:

$$\begin{aligned} \langle K_+, 1 | V_{PN} | K_+, 1 \rangle' &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{S_N} Y_{|\Omega_N| - \tau_N}^{*l_N}(\vartheta_N, \varphi_N) \chi_{\tau_N}^{*\frac{1}{2}}(\nu_N) V_{PN} Y_{-|\Omega_N| - \tau_N}^{l_N}(\vartheta_N, \varphi_N) \chi_{\tau_N}^{\frac{1}{2}}(\nu_N) \cos \vartheta_N d\vartheta_N d\varphi_N d\nu_N \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F_{-|\Omega_N| - \tau_N}^{l_N}(\vartheta_N) V_{PN} P_{-|\Omega_N| - \tau_N}^{l_N} \cos \vartheta_N d\vartheta_N d\varphi_N. \end{aligned}$$

$$\text{Analog: } \langle K_+, 2 | V_{PN} | K_+, 2 \rangle' = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_{-|\Omega_N| + \tau_N}^{l_N}(\vartheta_N) V_{PN} P_{-|\Omega_N| + \tau_N}^{l_N} \cos \vartheta_N d\vartheta_N d\varphi_N,$$

$$\langle K_-, 1 | V_{PN} | K_-, 1 \rangle' = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_{-|\Omega_N| - \tau_N}^{l_N}(\vartheta_N) V_{PN} P_{-|\Omega_N| - \tau_N}^{l_N} \cos \vartheta_N d\vartheta_N d\varphi_N = \langle K_+, 1 | V_{PN} | K_+, 1 \rangle,$$

$$\langle K_-, 2 | V_{PN} | K_-, 2 \rangle' = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_{-|\Omega_N| + \tau_N}^{l_N}(\vartheta_N) V_{PN} P_{-|\Omega_N| + \tau_N}^{l_N} \cos \vartheta_N d\vartheta_N d\varphi_N = \langle K_+, 2 | V_{PN} | K_+, 2 \rangle'.$$

reine Ortswechselwirkung V_{PN} nur die Nichtmischfachsummen über Integrale, die sich in den Fällen den, in denen V_{PN} mit obigen unterschiedlichen Wellenfunktionen integriert wird.

Wie man an den obigen Formeln sieht, sind nach ausgeführter Umrechnung die jeweiligen Anteile für die Fälle K_+ und K_- gleich. Nach dem vorher Ge-

sagten sind damit die Matrixelemente A_{K_-} und A_{K_+} identisch.

- ¹ J. S. GEIGER, R. L. GRAHAM u. G. T. EWAN, Bull. Amer. Phys. Soc. **5**, 255 [1960].
- ² S. G. NILSSON, Math. Phys. Medd. **29**, Bind [1954–55].
- ³ C. J. GALLAGHER JR. u. S. A. MOSZKOWSKI, Phys. Rev. **111**, 1282 [1958].
- ⁴ F. ASARO, I. PERLMAN, J. O. RASMUSSEN u. S. G. THOMSON, Phys. Rev. **120**, 934 [1960].
- ⁵ N. D. NEWBY JR., Phys. Rev. **125**, 2063 [1962].
- ⁶ G. L. STRUBLE, N. SHELTON u. R. K. SHELINE, Phys. Rev. Lett. **10**, 58 [1963].
- ⁷ C. M. LEDERER, J. M. HOLLANDER u. I. PERLMAN, Table of Isotopes, J. Wiley & Sons, New York 1967.
- ⁸ J. P. DAVIDSON, Rev. Mod. Phys. **37**, 1, 105 [1965].
- ⁹ J. P. DAVIDSON, Collective Models of the Nucleus, Academic Press, New York 1968.
- ¹⁰ M. E. ROSE, Elementary Theory of Angular Momentum, J. Wiley & Sons, New York 1966.
- ¹¹ H. NÄPFEL, H. RUDER u. H. VOLZ, Z. Naturforsch. **23 a**, 199 [1968].
- ¹² H. RUDER, Zur exakten Behandlung von kollektiven Rotationen, im Erscheinen.